

Erforschen, Entdecken, Erklären mit Hilfe „guter Aufgaben“



Inhalt

Vorwort	5
Einleitung	6
Ein Exkurs.....	7
Mathematisieren	8
Kreativität.....	8
Argumentieren	8
Zur Einstimmung.....	9
Eine Aufgabe	9
Eine „gute Aufgabe“: Erforschen – Entdecken – Erklären	9
Gute Aufgaben.....	11
Aufgabenanalyse und Aufgabenvariation	12
Kooperative Zusammenarbeit.....	14
Ein anderes Bild von Mathematik	15
Mathematik als Tätigkeit.....	15
Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern.....	16
Ein Blick auf Unterricht.....	16
Ein Blick auf die Rolle der Lehrkraft.....	17
Noch fünf wichtige Punkte	18
Anwendungs- und Strukturorientierung	18
Aufgaben- und Methodenorientierung	19
Kompetenz- und Defizitorientierung	19
Produkt- und Prozessorientierung	19
Fach- und Kindorientierung	20
Zusammenfassung	20
Anhang	22
Anhang 1: KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik.....	22
Anhang 2: Die Aufgabenanalyse: eine Arbeitstabelle.....	25
Anhang 3: Die Aufgabenvariation: verschiedene Beispiele	26
Literatur.....	30

Vorwort

Das Programm SINUS-Transfer Grundschule ist ein bundesweit an Grundschulen durchgeführtes Programm zur **Steigerung** der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen **Unterrichts**. In den Jahren 2004 bis 2009 wurden an 400 Schulen in 14 Bundesländern Vorhaben und Maßnahmen zur Qualitätssteigerung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts umgesetzt. Im Mittelpunkt des Programms stehen zehn Module, die aktuelle Frage- und Problemstellungen eines kompetenzorientierten Unterrichts aufgreifen. Des Weiteren wird die kooperative Zusammenarbeit zwischen Lehrkräften mit der Zielsetzung, den eigenen Unterricht qualitativ weiterzuentwickeln, initiiert.

In Hessen wird nach der erfolgreichen Umsetzung von SINUS-Transfer Grundschule das Programm „SINUS – Weiterentwicklung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts an Grundschulen“ aufgelegt. In den nächsten fünf Schuljahren werden Schulen Maßnahmen zur Qualitätssteigerung im Mathematikunterricht umsetzen. Auf der Grundlage von vier Bausteinen, die aktuelle fachdidaktische und methodische Fragestellungen des Unterrichtens in Mathematik aufgreifen, und dem Prinzip der kooperativen Zusammenarbeit zwischen Lehrkräften wird sich der Mathematikunterricht kompetenzorientiert weiterentwickeln.

Der SINUS-Baustein 1 „Erforschen, Entdecken und Erklären mit Hilfe ‚guter Aufgaben‘“ ist auf der Grundlage des Moduls G1 „Gute und andere Aufgaben“ und des Moduls G2 „Erforschen, Entdecken und Erklären im Mathematikunterricht der Grundschule“ aus dem Programm SINUS-Transfer Grundschule entstanden und hebt zum einen die elementaren Aussagen bezüglich eines kompetenzorientierten Unterrichts und zum anderen den kooperativen Aspekt in der Zusammenarbeit der Lehrkräfte bei der Entwicklung und Erprobung von „guten Aufgaben“ hervor.

Ilse Eckhardt

SINUS-Transfer Grundschule

Schulsetkoordinatorin Mathematik Hessen 2004–2009

Walther, G. (2004): SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G1: „Gute und andere Aufgaben“

Selter, C. (2004): SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G2: „Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule“

Einleitung

Bezug: Beschlüsse der Kultusministerkonferenz

Bildungsstandards im Fach Mathematik (Jahrgangsstufe 4), 2004

Auftrag der Grundschule ist die Entfaltung grundlegender Bildung. Diese stellt die Basis für weiterführendes Lernen und für die Fähigkeit zur selbstständigen Kulturaneignung dar. Die Förderung der mathematischen Kompetenzen ist dabei ein wesentlicher Bestandteil dieses Bildungsauftrags.

Der Mathematikunterricht der Grundschule greift die frühen mathematischen Alltagserfahrungen der Kinder auf, vertieft und erweitert sie und entwickelt aus ihnen elementare mathematische Kompetenzen. Auf diese Weise wird die Grundlage für das Mathematiklernen in den weiterführenden Schulen und für die lebenslange Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungen des täglichen Lebens gelegt. Das Ziel ist u.a. die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte sowie der Aufbau einer positiven Einstellung zum Fach Mathematik.

Die Anforderungen an den Unterricht orientieren sich dabei an den KMK-Bildungsstandards. Die Standards greifen in den fünf Leitideen „Zahlen und Operationen“, „Raum und Form“, „Muster und Strukturen“, „Größen und Messen“ sowie „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ die Inhaltsgebiete der Mathematik auf. Daneben werden Kompetenzbereiche wie Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Darstellen als „allgemeine mathematische Kompetenzen“ (auch: „prozessbezogene Kompetenzen“) benannt. Diese werden für das Mathematiklernen und die Mathematik insgesamt als charakteristisch angesehen und spielen im Unterricht zunehmend eine zentrale Rolle (vgl. Anhang 1). Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen verdeutlichen, dass die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der mathematischen Grundbildung ist. Deren Entwicklung hängt somit nicht nur davon ab, welche Inhalte unterrichtet werden, sondern in welchem Maße den Kindern Gelegenheit gegeben wird, selbst Probleme zu lösen, über Mathematik zu kommunizieren oder Argumente für mathematische Aussagen zu finden. Die Prozesse des Mathematiklernens sind dabei ebenso wichtig wie die Lernprodukte. In einem Mathematikunterricht, der die allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Mittelpunkt des unterrichtlichen Geschehens rückt, wird es besser gelingen, die Freude an der Mathematik und die Entdeckerhaltung der Kinder zu fördern und weiter auszubauen.

Die Modulbeschreibungen „Gute und andere Aufgaben“ (Walther 2004) und „Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule“ (Selter 2004) des Programms SINUS-Transfer Grundschule (2004–2009) greifen die Aussagen der KMK-Bildungsstandards für das Fach Mathematik auf und entwickeln sie weiter. Das Programm SINUS-Transfer Grundschule hat sich somit als „Motor“ für die Einführung und Umsetzung der KMK-Bildungsstandards in der unterrichtlichen Praxis der Schulen erwiesen.

Ein Exkurs

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule Modul G1, S. 6–9

Kompetenzen beschreiben das, was ein Lernender kann oder können sollte. Die Entwicklung und Festigung von Kompetenzen erfolgt über bestimmte Aktivitäten und Tätigkeiten des Lernenden. Der Mathematikdidaktiker Heinrich Winter hat vor gut 35 Jahren durch seine fachdidaktischen Beiträge einen entscheidenden Impuls für eine nachhaltige Diskussion über „allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts“ gegeben (Winter 1972). Dabei wird das grundlegende allgemeine Ziel der „Fähigkeit zum Mathematisieren, Kreativität, Argumentationsfähigkeit“ als bei den Schülerinnen und Schülern „anzustrebende Verhaltensweise[n]“ beschrieben. Die Zielvorstellungen von Winter haben den Kern der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards unverkennbar geprägt. Ebenso stehen die Module G1 und G2 des Programms SINUS-Transfer Grundschule in einem engen Zusammenhang mit den von Winter formulierten „allgemeinen Zielen“ für den Mathematikunterricht. Kreativität, Ideenreichtum und die Fähigkeit, inner- oder außermathematische Situationen mit mathematischen Mitteln zu ordnen, sind Bedingungen für entdeckendes und erforschendes Lernen. Daher wird im Folgenden (leicht verändert) die von Wittmann (1981) vorgenommene Aufschlüsselung der allgemeinen Ziele „Mathematisieren, Kreativität, Argumentationsfähigkeit“ in Teilkompetenzen wiedergegeben. Die aufgeführten Unterpunkte stellen eine Beschreibung von Aktivitäten gesehen dar, die die Entwicklung und Festigung von Kompetenzen bei Lernenden unterstützend aufbauen.

Mathematisieren

Die Schülerin/der Schüler soll lernen, Situationen (mathematischer und besonders auch real-umweltlicher Art) zu mathematisieren:

1. Situationen mit mathematischen Mitteln erfassen und darstellen
2. Daten gewinnen (durch Experimentieren, Zählen, Messen, Schätzen)
3. Strukturelle Zusammenhänge aufdecken und formulieren (d.h. Bildung einer mathematischen Struktur bzw. – im Fall einer Realsituation – eines mathematischen Modells)
4. Sachrelevante Problemstellungen aufgreifen bzw. selbst finden
5. Daten im Hinblick auf Lösungen der Probleme verarbeiten
6. Lösungen und Lösungswege situationsadäquat interpretieren, diskutieren und darstellen

Kreativität

Die Schülerin/der Schüler soll lernen, sich forschend-entdeckend und konstruktiv zu betätigen:

1. Vermutungen (z.B. über Beziehungen, Muster, Strukturen, ...) aufstellen
2. Lösungs- und Begründungsideen entwickeln, Lösungswege planen
3. Komplexe Handlungsabläufe sachadäquat in Teilschritte gliedern
4. Über die gegebenen Informationen hinausgehen
5. Eine Situation bzw. Aufgabenstellung variieren, fortsetzen, übertragen
6. Verallgemeinerungen erkennen und formulieren
7. Probleme konstruieren

Argumentieren

Die Schülerin/der Schüler soll lernen zu argumentieren:

1. Sich an Vereinbarungen (Regeln, Definitionen) halten
2. Allgemeine Aussagen an Spezialfällen testen (Beispiele – Gegenbeispiele)
3. Begründen, folgern, beweisen
4. Begründungen auf Stichhaltigkeit prüfen, Scheinargumente aufdecken
5. Mathematische Überlegungen bezüglich ihrer Verständlichkeit, Prägnanz und Bedeutung diskutieren und bewerten

Zur Einstimmung

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule, Modul G1

Eine Aufgabe

(Walther spricht hier im Kontext des Moduls G1 „Gute und andere Aufgaben“ von einer „anderen Aufgabe“.)

Rechne aus:

$450 + 80$	$450 + 120$	$450 - 65$	$450 + 145$
$450 - 80$	$450 - 120$	$450 + 65$	$450 - 145$

Die Berechnung von Summe und Differenz in den Aufgabenpaaren erfordert grundlegende Fertigkeiten in Kopfrechenstrategien oder bei halbschriftlichen bzw. schriftlichen Verfahren. Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen der Leitideen „Zahlen und Operationen“ sowie „Muster und Strukturen“ werden umgesetzt (KMK-Bildungsstandards 2004). Diese Intention ist auch weiterhin ein elementares Anliegen des Mathematikunterrichts („Es gibt kein Stricken ohne Wolle.“ Walther 2004).

Eine „gute Aufgabe“: Erforschen – Entdecken – Erklären

Addiere jeweils die beiden Ergebnisse der Paare, die untereinander stehen:

$450 + 80$	$450 + 120$	$450 - 65$	$450 + 145$
$450 - 80$	$450 - 120$	$450 + 65$	$450 - 145$

Erforsche:

- Was fällt dir an den Ergebnissen auf?
In jedem der Aufgabenpaare ergibt die Addition der beiden Ergebnisse die Zahl 900.

Entdecke:

- Denke dir Aufgabenpaare aus, bei denen die Summe der Ergebnisse immer 900 ist. Was kannst du entdecken?
- Denke dir Aufgaben aus, bei denen die Summe der Ergebnisse immer 760 (oder andere Zahl) ist.
- Welche Regel muss gelten, damit die Summe der Ergebnisse immer gleich ist?

Erkläre:

- Womit hängt es zusammen, dass in jedem der Aufgabenpaare die Addition der beiden Ergebnisse die Zahl 900 (bzw. immer die gleiche Zahl) ergibt?
In jeder Aufgabe eines Paares steht als erstes die Zahl 450. Bei einer der Aufgaben wird dann jeweils eine Zahl addiert; bei der anderen Aufgabe wird dieselbe Zahl subtrahiert.
- Woran liegt es, dass die Addition der beiden Ergebnisse immer 900 ergibt? Wie hängt die Zahl 900 mit den Zahlen zusammen, die in den Aufgaben vorkommen?
Mögliche Lösungen: $450 + 80 + 450 - 80 = 900$ oder: Es wird jeweils die gleiche Zahl addiert und subtrahiert, daher kann man 450 und 450 addieren und erhält 900. oder: Darstellung am Zahlenstrich
- Warum erhältst du bei der Addition der Ergebnisse von $450 - 82$ und $450 + 85$ nicht ebenfalls das Ergebnis 900?
Man erhält nicht 900, da nicht dieselbe Zahl addiert bzw. subtrahiert wird.

Erforsche, Entdecke und Erkläre:

- Finde Aufgaben, bei denen die Summe der Ergebnisse 570 ist.
- Was passiert, wenn du die Ergebnisse subtrahierst, statt sie zu addieren?

(Anmerkung: Die Schülerinnen und Schüler werden in ihren Erklärungen sicherlich andere, altersgemäße Termini verwenden.)

Bei dieser Aufgabe wird der Bezug zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen deutlich. Neben dem Aufbau der inhaltlichen Fertigkeiten (Kopfrechenstrategien, schriftliche und halbschriftliche Verfahren) werden gleichermaßen allgemeine mathematische Kompetenzen wie Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren (z.B. mit einem Partnerkind), Mathematisieren (die Frage nach dem strukturell Gemeinsamen), Darstellen (z.B. „Beweis“ am Zahlenstrich) intendiert. Auch werden die Zielsetzungen für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht nach Winter (Mathematisieren, Kreativität, Argumentationsfähigkeit) berücksichtigt, wie im Folgenden gezeigt wird:

Mathematisieren

Beim Mathematisieren stellt sich die Frage nach dem strukturell Gemeinsamen, also dem Muster, das die Aufgabe verbindet. In jeder Aufgabe kommt die Zahl 450 vor. In jedem Paar wird zu 450 die gleiche Zahl addiert bzw. von 450 subtrahiert. Bei der Addition der

Ergebnisse in jedem Paar ergibt sich stets die gleiche Zahl (nämlich 900). Es stellt sich also die Frage, wie die Zahl 900 mit den Zahlen, die in den Aufgaben vorkommen, zusammenhängt.

Kreativität

Kreativität ist gefordert, wenn eigene Aufgabenpaare konstruiert werden sollen. Dabei wird zunächst die Zahl 450 eine Rolle spielen. Dann aber ergibt sich eine Verallgemeinerung, wenn die Schülerinnen und Schüler andere Zahlen wählen und dabei entdecken, dass sie nach der Addition der Ergebnisse ebenfalls das Doppelte der ersten Zahl erhalten. Ein neues Problem kann konstruiert werden, wenn in einer Variante der ursprünglichen Aufgabe Aufgabenpaare gefunden werden sollen, deren Ergebnissumme schon gegeben ist, z.B. 430.

Grenzen der Betrachtung erfahren die Kinder, wenn es dann darum geht, eine ungerade Ergebnissumme zu bearbeiten.

Argumentationsfähigkeit

Die Schülerinnen und Schüler begründen, warum die Addition der beiden Ergebnisse eines Aufgabenpaares stets die Zahl 900 ergibt.

Gute Aufgaben

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule, Modul G1

Aufgaben spielen eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht. Sie gehören zum Alltag des Mathematiklernens von Kindern und Lehrkräften und sind mit vielfältigen Aktivitäten und Bezügen verbunden. Dabei erfüllen Aufgaben zwei grundlegende didaktische Funktionen. Zum einen zielen sie auf fachbezogene Anforderungen bei den Lernenden, d.h. Lernprozesse zur Entwicklung und Konsolidierung von Kompetenzen werden angestoßen. Zum anderen haben sie die Intention, Lernergebnisse zu überprüfen und den Leistungsstand der Lernenden (Kompetenzzuwachs) festzustellen. Aufgaben können am Beginn einer Unterrichtsstunde stehen, um in eine problemhaltige Situation einzuführen oder eine mathematische Operation bzw. Struktur zu erarbeiten. Im Verlauf des unterrichtlichen Geschehens bieten sie vielfältige Übungsmöglichkeiten oder tauchen als Hausaufgaben im außerschulischen Bereich auf. Aufgaben können in mündlicher und schriftlicher, auch illustrierter Form gestellt werden, es wird zwischen Sachaufgaben und

Zahlen- bzw. Operationsaufgaben unterschieden (zur Rolle von Sachaufgaben vgl. Walther 2004).

Den Aufgaben, die primär auf den Aufbau von Kenntnissen und Fertigkeiten, wie z.B. die Routinierung des Einmaleins, zielen (Walther spricht von „anderen Aufgaben“), stehen zunehmend Aufgaben oder Aufgabenformate gegenüber, die in der Literatur als „gute (auch: substantielle/ herausfordernde/ ergiebige) Aufgaben“ beschrieben werden. Gemeint sind Aufgaben, die Anlass bieten, neben inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen gleichermaßen allgemeine mathematische Kompetenzen analog der KMK-Bildungsstandards umzusetzen. „Gute Aufgaben“ werden dabei als ein Instrument im Prozess der Qualitätsentwicklung des Mathematikunterrichts gesehen (vgl. Ruwisch/ Peter-Koop 2009).

„Gute Aufgaben‘ sind Aufgaben, welche bei Schülern in Verbindung mit grundlegenden mathematischen Begriffen und Verfahren die Entwicklung prozessbezogener [gemeint sind: allgemeine mathematische Kompetenzen, Anm.] unterstützen.“ (Walther 2004)

In diesem Sinne ist die oben dargestellte Aufgabe als eine „gute Aufgabe“ zu bewerten.

Aufgabenanalyse und Aufgabenvariation

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule, Modul G1, S. 11ff. und 24ff.

Ein Instrument, um aus Aufgaben, die spezifische mathematische Anforderungen an Schülerinnen und Schüler stellen, „gute Aufgaben“ im Sinne der benannten Kriterien zu erstellen, ist die **Aufgabenanalyse**. Dabei wird das Potential, das eine Aufgabe zur Umsetzung von inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen (z.B. die Erarbeitung von grundlegenden Inhalten bezogen auf die Leitideen der Bildungsstandards) **und** von allgemeinen mathematischen Kompetenzen bietet, herausgearbeitet.

„Mit der Analyse von Aufgaben soll ihr Potential ausgelotet werden, die Entwicklung bzw. Festigung von prozessbezogenen [gemeint sind: allgemeine mathematische Kompetenzen, Anm.] Kompetenzen zu unterstützen.“ (Walther 2004)

Für eine vertiefende Auseinandersetzung mit der Thematik „Gute Aufgaben“ mit dem Ziel, den eigenen Unterricht kompetenzorientiert anzulegen, ist es unerlässlich, selbst aktiv zu werden und ausgewählte Aufgaben (aus Lehrwerken, Büchern, Karteien, Fachliteratur, Eigenproduktionen u.a.) auf den Gehalt an allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu analysieren (vgl. Anhang 2).

Hierzu bieten sich folgende Aspekte bei der Betrachtung einer Aufgabe an:

- Welches Potential bietet die Aufgabe, um inhaltliche Kompetenzen zu erwerben?
- Bietet die Aufgabe Potential, um allgemeine mathematische Kompetenzen zu erlangen?
- Welche Kompetenzen werden bei den Kindern angelegt und erzielt?

Folgende Fragen in Aufgabenstellungen im Unterricht sind dabei dienlich:

- Was kannst du erforschen?
- Was fällt dir auf?
- Was kannst du entdecken?
- Kannst du deine Entdeckung erklären?
- Weshalb gilt das?
- Woran liegt es, dass ...?

Die Aufgabenanalyse stellt **ein** wichtiges Handlungsfeld in der Thematik der Weiterentwicklung eines kompetenzorientierten Unterrichts dar; ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Methode der **Aufgabenvariation**. Hierbei werden Aufgaben untersucht, die zunächst keine expliziten Ansatzpunkte für die Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen enthalten, aber durch Variationen zu „guten Aufgaben“ gemacht werden können. Man geht also davon aus, dass sich durch die Herausstellung des Potentials, das eine Aufgabe bietet, eine „gute Aufgaben“ erstellen lässt. Bei der Aufgabenvariation wird aus der Aufgabe „etwas gemacht“. Der wichtigste Schritt bei der Aufgabenvariation ist die Identifizierung der Parameter (variierbare Bestimmungen) der Aufgabe. Die Parameter werden betrachtet und Variationen festgelegt.

Die elementare Fragestellung lautet demnach: „Lässt die Aufgabe Variationen zu, die geeignet sind, allgemeine mathematische Kompetenzen aufzubauen?“

So können z.B. Ausgangszahlen oder Verknüpfungen verändert werden, es können Umkehrungen der Aufgabenstellungen erfolgen und bei Sachaufgaben können zusätz-

liche, auf die Sache bezogene Überlegungen angestellt werden, bevor mit dem eigentlichen Rechnen begonnen wird (vgl. Walther 2004).

Das systematische Instrument der Aufgabenvariation ist unter dem Aspekt des Mathematisierens sowohl für die Schülerinnen und die Schüler als auch für die Lehrkraft eine kreative Handlung. Lehrkräfte erzeugen Aufgaben oder stoßen im Unterricht die Erzeugung von Aufgaben durch die Aufforderung „Erfinde!“ oder „Was passiert, wenn du die Anfangszahl veränderst?“ an. Wenn Schülerinnen und Schüler dann spontan im Unterricht eigene Aufgabenvarianten entwickeln, ist das in der Regel eine kreative Tätigkeit. Damit werden bei den Lernenden allgemeine mathematische Kompetenzen umgesetzt.

Kooperative Zusammenarbeit

Bezug: Programm SINUS-Transfer Grundschule

In der Umsetzung des Programms SINUS-Transfer Grundschule hat die kooperative Zusammenarbeit zwischen Lehrkräften einer Schule sowie Lehrkräften verschiedener Schulen positive Effekte erzielt. Um beim Umgang mit „guten Aufgaben“ und damit verbunden dem Einsatz der Instrumentarien der Aufgabenanalyse und Aufgabenvariation zu einem konstruktiven Ideenaustausch zu kommen, wird die Kooperation mit Kolleginnen und Kollegen dringend empfohlen (vgl. Walther 2004). Lehrkräfte treffen sich in Jahrgangs- oder Fachkonferenzen und suchen gemeinsam nach guten Aufgabenbeispielen, die explizite Anhaltspunkte für die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen enthalten. Während der Aufgabenbearbeitung tauschen sich die Kolleginnen und Kollegen darüber aus, welche Kompetenzen auf welche Weise gefördert werden können (Aufgabenanalyse). Zudem wird erörtert, ob in der Aufgabe noch weiteres Potential für die Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen steckt (Aufgabenvariation). Die Ergebnisse zu „guten Aufgaben“ können in einem Aufgabenportfolio gesammelt und anderen Lehrkräften zur Verfügung gestellt werden. Die Rückmeldungen über die Umsetzung und Durchführung im Unterricht und die Illustration von Schülerergebnissen runden den kooperativen Austausch ab.

Ein anderes Bild von Mathematik

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule, Modul G2

„Mathematik ist keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geisteshaltung.“ (Freudenthal 1982)

In den letzten Jahren wurden vermehrt Aufgaben und Aufgabenformate entwickelt, die gleichermaßen inhaltsbezogene und allgemeine mathematische Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern erzielen. So beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht mit Aufgabenfeldern wie Zahlengitter, Rechendreiecke, Schöne Päckchen (Operative Übungen), Zahlenmauern, Aktivitäten am Geobrett oder Zeitungsmeldungen. In diesen Aufgabenformaten kommt ein Bild von Mathematik zum Ausdruck, das sich gegenüber der Sichtweise der „Mathematik als (elitärer) Geheimwissenschaft“ abgrenzt und durch die Umschreibung „Mathematik als Tätigkeit“ und als „Wissenschaft von den Mustern“ gesehen wird (vgl. Selter 2004).

Mathematik als Tätigkeit

So wie die Begriffe „Kunst“ und „Musik“ nicht nur für etwas schon Fertiges stehen – nämlich die Bilder oder Musikstücke – sondern auch für das, was Künstler oder Musiker tun, nämlich malen oder musizieren, so steht auch Mathematik für eine **Tätigkeit**, bei der

- Intuition, Fantasie und schöpferisches Denken beteiligt sind,
- man durch eigenes und gemeinschaftliches Nachdenken Einsichten erwerben und Verständnis gewinnen kann und
- selbstständig Entdeckungen machen und dabei Vertrauen in die eigene Denkfähigkeit und Freude am Denken aufbauen kann (vgl. Selter/ Spiegel 2003).

Das erforschende und entdeckende Lernen und Lehren im Mathematikunterricht über die Auseinandersetzung mit „guten Aufgaben“ zeigt deutlich, dass Mathematik nicht nur eine Ansammlung von Regeln und Rezepten ist oder sich auf das Ausführen und Anwenden vorgegebener Verfahren reduziert, sondern voller Entdeckungsmöglichkeiten ist.

Kreativität, Ideenreichtum und die Fähigkeit, Situationen mathematisch zu sehen, führen zu entdeckendem und erforschendem Lernen.

Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern

Im Kontext von „guten Aufgaben“ spielen das Sehen, Beschreiben, Erfinden, Untersuchen, Fortsetzen, Ordnen und Abwandeln von Mustern eine entscheidende Rolle. Muster in Aufgaben werden erforscht, entdeckt und erklärt (vgl. Selzer 2004).

Dabei beschränkt sich der Begriff „Muster“ keineswegs nur auf sichtbare Muster wie bei Zahlenfolgen oder Parkettmustern, sondern steht stellvertretend für Begriffe wie Ordnungen, Strukturen, Beziehungen, Zusammenhänge, Auffälligkeiten, Abhängigkeiten oder Regelmäßigkeiten. Durch die Beschäftigung mit Mustern lernt man, die Welt zu ordnen.

„Mathematische Muster dürfen nicht als fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Im Gegenteil: Es gehört zu ihrem Wesen, dass man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann.“ (Wittmann 1981)

Ein Blick auf Unterricht

Ein Unterricht, der sich an Kompetenzen orientiert, wird nicht allein durch die Auswahl und den Einsatz einer „guten Aufgabe“ bestimmt. Ebenso ist die unterrichtliche Gestaltung, d.h. der Umgang der Lehrkräfte und der Lernenden mit der Aufgabe, zu beachten. So müssen die methodischen und zeitlichen Voraussetzungen zum Erforschen, Entdecken und Erklären gegeben werden. Eine zeitgemäße Unterrichtskultur nimmt darüber hinaus die Art und Weise, wie Lehrkräfte und Lernende im Unterricht miteinander umgehen, in den Blick.

Da sich Kompetenzen nur durch entsprechende Tätigkeiten seitens des Kindes entwickeln, bedeutet dies für den Unterricht, dass Situationen bereitgestellt werden, die Tätigkeiten seitens des Kindes erlauben. Die Kompetenz „Problemlösen“ wird also nur durch das Bearbeiten von problemhaltigen Aufgaben durch das Kind oder die Kinder in gemeinsamer Arbeit erlernt. Ebenso setzen Kinder die Kompetenz „Kommunizieren“ nur um, wenn der Unterricht Situationen bereithält, wo sie sich über Lösungsversuche und Lösungswege unterhalten dürfen und anschließend in Mathematikkonferenzen die eigenen oder im Team gefundenen Resultate präsentieren können. Ein lautloser Unterricht, in dem Kinder Arbeitsblätter in Einzelarbeit bearbeiten, wird diesem Anspruch nicht gerecht. Vorrangig sollen Partner- und Gruppenarbeitsprozesse initiiert werden. Bei

der Umsetzung des Programms SINUS-Transfer Grundschule hat sich folgendes Modell der Verständigung über Rechenstrategien und Lösungsvorschläge in Phasen bewährt: Nach der Präsentation der „guten Aufgabe“ durchlaufen die Schülerinnen und Schüler

- eine Phase der Einzelarbeit,
- eine Phase der Partnerarbeit, um Lösungen zu vergleichen,
- eine längere Phase der Gruppenarbeit mit dem Ziel, den in der wechselseitigen Verständigung gemeinsam gewählten Lösungsweg als Gruppenergebnis zu verabschieden und im Plenum vorzustellen,
- eine Phase des Vortrags der Gruppenergebnisse durch ein Kind und
- eine Phase des Vergleichs der Ergebnisse der Gruppen mit dem Auftrag der Ergänzung und (gegebenenfalls) Modifizierung.

Als Abschluss folgt die Präsentation auf einer Wandzeitung oder die Fixierung im Berichtsheft.

Das Erstellen und Erproben weiterer unterrichtlicher Gestaltungsideen und die Reflexion über die Erfahrungen in der Umsetzung können weitere Schwerpunkte in der kollegialen Zusammenarbeit zwischen Lehrkräften darstellen.

Ein Blick auf die Rolle der Lehrkraft

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule, Modul G1, S. 25

„Gute Aufgaben“ stellen durch ihre erhöhten kognitiven Anforderungen nicht nur eine besondere Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler dar, sondern auch für die Lehrkräfte. In diesem Kontext ist die Veränderung der Rolle der Lehrkraft zu sehen. In einem Unterricht, der das Beschreiben und Begründen als einen selbstverständlichen Bestandteil sieht und die Grundhaltung der Kinder zum Erforschen, Entdecken und Erklären aufbaut, bestimmt die Lehrkraft nicht mehr zentral das Unterrichtsgeschehen. Der Tendenz, im unterrichtlichen Geschehen zu schnell Lösungshilfen geben zu wollen und damit allgemeine mathematische Kompetenzen zugunsten von inhaltlichen Aspekten zu reduzieren, sollte entgegengewirkt werden. Wenn Hilfen nötig sind, dann sollten diese so sparsam wie möglich gegeben werden, sodass sie für die Schülerinnen und Schüler nur Orientierungen darstellen (Stichwort „Hilfe zur Selbsthilfe“), aber keine Teillösungen

verraten. In der Praxis hat es sich bewährt, Helfer- und Expertenkinder zu benennen. Des Weiteren sollte die Lehrkraft beachten, dass Schülerinnen und Schüler zur Bearbeitung von „guten Aufgaben“ genügend Zeit benötigen. Sie brauchen Zeit zum Nachdenken, zum Untersuchen einzelner Beispiele, zum Gedankenaustausch mit anderen Schülerinnen und Schülern, zur Darstellung des Lösungsweges usw. In einer Unterrichtsstunde kommt es nicht auf die Anzahl der bearbeiteten Aufgaben an, sondern auf die Qualität des Umgangs mit „guten Aufgaben“. Wichtig dabei ist sicherzustellen, dass die Lernenden die Aufgabe verstanden haben, das nötige Vorwissen verfügbar ist und die Materialien, die zur Aufgabenbearbeitung nötig sind, zur Verfügung stehen. Spontan im Unterricht – insbesondere im Unterrichtsgespräch – auftretende Situationen entziehen sich einer vorbereitenden Planung. Um hier neben der Ebene der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen spontan die Ebene der allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu berücksichtigen, ist in besonderem Maße die Erfahrung der Lehrkraft im Umgang mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefragt. Daher wird erneut auf die kooperative Zusammenarbeit der Lehrkräfte verwiesen. So können eigene Erfahrungen im Unterricht im Hinblick auf die gesetzten Ziele reflektiert und ggf. Alternativen entwickelt werden. Auch wechselseitige Unterrichtshospitationen sind innerhalb dieses Prozesses gut geeignet.

Noch fünf wichtige Punkte

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule, Modul G3, S. 30ff.

Anwendungs- und Strukturorientierung

Bei der Auswahl von Aufgaben ist es von Bedeutung, dass beide Aspekte der Mathematik zum Tragen kommen, denn Mathematik ist sowohl anwendungs- als auch strukturorientiert. Eine einseitige Behandlung von „guten Aufgaben“, die lebensweltliche Orientierungen erhalten und reale Kontexte aufgreifen (Sachaufgaben mit Realbezug), wird dem Wesen der Mathematik nicht gerecht. Wichtig ist auch ein hinreichendes Angebot von Aufgaben ohne Wirklichkeitsbezug, wie „Zahlengitter“ oder „Schöne Päckchen“. Innerhalb solcher substantieller Kontexte lassen sich vielfältige Aufgaben zur Erforschung inner- und außermathematischer Muster formulieren, die die Kinder zu erforschenden, entdeckenden und erklärenden Aktivitäten auffordern.

Aufgaben- und Methodenorientierung

Nicht jede „gute Aufgabe“ zum Erforschen, Entdecken und Erklären führt dazu, dass alle Schülerinnen und Schüler kontinuierlich motiviert an deren Lösung arbeiten. Wichtig ist, dass der methodische Rahmen gegeben ist. Besonderer Beachtung bedarf dabei eine verständliche und schlüssige Aufgabenstellung bzw. Aufgabenvorschrift anhand exemplarischer Beispiele mit sinnvoll ausgewähltem Zahlenmaterial, das Bereitstellen von Tipps, die Vorbereitung auf mögliche Schwierigkeiten in der Durchführung, die Zieltransparenz, die Zurverfügungstellung eines ausreichenden Zeitrahmens, um die Fragestellungen anhand hinreichend vieler selbst bearbeiteter Beispiele und durch das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede wirklich zu durchdringen (vgl. Walther 2004).

Kompetenz- und Defizitorientierung

Eine positiv-optimistische Grundeinstellung gegenüber dem Denken und Lernen der Schülerinnen und Schüler ist erforderlich. Sinnvolle Vorgehensweisen, vielversprechende Denkansätze und erstaunliche Arbeitsergebnisse werden oft nicht erkannt, weil die Lehrkraft das Vorgehen der Kinder sowie ihre Äußerungen nicht ausreichend beobachtet oder unfertiges und auf Anhieb nicht verständliches Denken als fehlerhaft und defizitär deutet. Demgegenüber steht der Blick auf vorhandene Fähigkeiten der Kinder und deren Entwicklungspotentiale. Es gilt also, kleine Erfolge und Fortschritte der Lernenden zu sehen und anzuerkennen. Lob und Ermutigungen führen zu erfolgreichem Lernen.

Produkt- und Prozessorientierung

Mathematikaufgaben, durch die die Leistungen von Kindern festgestellt und bewertet werden sollen, sind überwiegend produktorientiert: Es kommt vorrangig auf richtige Lösungen an. Dabei werden lediglich Resultate erhoben, über Lösungsstrategien wird kaum etwas ausgesagt. Vielfach ist es nicht möglich, Stärken und Schwächen der einzelnen Kinder differenziert zu sehen. Des Weiteren sind das Einsatzgebiet und die Aussagekraft solcher Aufgaben stark eingeschränkt, denn die Aufgaben sind auf Inhalte begrenzt, die leicht abprüfbar sind und daher nicht geeignet erscheinen, allgemeine mathematische Kompetenzen zu erheben. Dieser Aspekt betrifft die gängigen Formen der Leistungsfeststellung und Leistungserhebung. Diese müssen unter dem Ansatz des kompetenzorientierten Lernens ein anderes Verständnis erhalten. Das betrifft z.B. die individuelle Leistungserhebung auch in Klassenarbeiten, die Fehlerakzeptanz und das Zulassen verschiedener Lösungswege (vgl. Sundermann/ Selter 2006).

Fach- und Kindorientierung

Als grundlegende Erkenntnis fachdidaktischer, psychologischer und pädagogischer Forschung gilt, dass Lernen nicht die Übernahme von fertigem Wissen, sondern stets ein aktiver, konstruktiver und individueller Prozess ist.

Kinder wollen entdecken – auch im Mathematikunterricht. Daher ist eine verstärkte Berücksichtigung allgemeiner mathematischer Kompetenzen nicht nur aus fachorientierter, sondern auch aus kindorientierter Perspektive erforderlich.

Zusammenfassung

Bezug: Aussagen von Lehrkräften im Kontext der Umsetzung des Programms „SINUS-Transfer Grundschule“ (2004–2009)

Zusammenfassend lässt sich Folgendes festhalten:

„Gute Aufgaben“ sind Aufgaben, bei denen die Kinder inhaltsbezogene Anforderungen bewältigen und gleichermaßen allgemeine Kompetenzen, wie z.B. Argumentieren, Kommunizieren und Mathematisieren umsetzen können. „Gute Aufgaben“ regen zum Nachdenken, Erforschen Entdecken, Erklären und Erfinden an. „Gute Aufgaben“ motivieren Kinder, ihre Kenntnissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten anzuwenden und damit die Lebenswirklichkeit zu verstehen und zu bewältigen. Diese Art von Aufgaben weckt Freude an Mathematik, regt Fantasie und Kreativität an.

„Gute Aufgaben“

- erlauben Sprechansätze und Fragestellungen und initiieren dadurch eine Kommunikation zwischen Kindern und der Lehrerin in Partner- und Gruppenarbeiten und in Mathematikkonferenzen,
- führen zum eigenverantwortlichen Lernen, geben eine Entdeckerzeit,
- lassen individuelle Strategien, Lösungswege und Umwege im Denken zu,
- sehen Fehler als Chance,
- veranlassen soziales Lernen durch den Einsatz von Helferkindern, Partnerkinder oder Expertenkindern,
- erzeugen Neugier, Spannung und Freude an Entdeckungen,
- initiieren Eigenproduktionen und reduzieren den Einsatz von reproduzierenden und strukturierten Arbeitsblättern,

- beachten Anschauungsebenen und Operationsebenen,
- ermöglichen eine natürliche Differenzierung und
- fördern das Selbstvertrauen in die eigene Leistung und erzielen individuelle Lernerfolge bei Kindern.

Der Umgang mit „guten Aufgaben“ führt demnach zu einem veränderten Unterricht, in dem Kinder aktiv werden, Probleme gemeinsam bearbeiten und sich gegenseitig unterstützen, in Mathematikkonferenzen über Lösungswege kommunizieren, „Aufgabenerfinder“ sowie „Forscher“ sind, Fehler erwünscht sind und Freude an mathematischem Tun erzeugt wird.

Weiterhin führt die Beschäftigung mit „guten Aufgaben“ zu einer kollegial unterstützenden Zusammenarbeit zwischen Kollegien mit dem Ziel, den Mathematikunterricht gemeinsam weiterzuentwickeln.

Anhang

Anhang 1: KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik

Bezug: KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik, Jahrgangsstufe 4, S. 9–10

Allgemeine mathematische Kompetenzen zeigen sich in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik und werden auch auf die gleiche Weise, nämlich in der tätigen Auseinandersetzung, erworben. Die angestrebten Formen der Nutzung der Mathematik müssen daher auch regelmäßig genutzte Formen des Mathematiklernens sein. Von zentraler Bedeutung für eine erfolgreiche Nutzung und Aneignung von Mathematik sind vor allem die folgenden fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen:

Problemlösen

- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen, z.B. systematisch probieren
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Anmerkung:

Problemlösen findet z.B. statt, wenn Kinder sich mit einem von einer Mitschülerin/ einem Mitschüler erfundenen Rechenpäckchen, bei dem die einzelnen Aufgaben auf mehrfache Weise verbunden sind (ein Muster aufzeigen), auseinandersetzen und dabei Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen erkennen und für Argumentationen nutzen.

Zum Problemlösen gehört auch, dass Kinder eigene Aufgaben (ggf. in Anlehnung an bekannte) entwerfen und beim Konstruieren analoger Aufgaben erkunden müssen, worauf „es ankommt“.

(Umsetzung des Programms SINUS-Transfer Grundschule im Schulset Mathematik im Bereich des Staatlichen Schulamtes Kassel auf der Grundlage des Moduls G1, 2004–2009)

Kommunizieren

- eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren
- mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden
- Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten

Anmerkung:

Kommunizieren findet statt, wenn Kinder gemeinsam Aufgaben bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten sowie eigene und fremde Standpunkte zueinander in Beziehung setzen.

Kommunizieren findet in unterschiedlichen Sozialformen statt und ist gefordert, wenn

- Ideen und Lösungswege ausgetauscht werden,
- über Ideen und Lösungswege berichtet wird,
- Ideen und Lösungswege verbessert und kommentiert werden,
- Kinder gemeinsam an Aufgaben arbeiten,
- Kinder individuell erarbeitete Ergebnisse vorstellen,
- Kinder ihre Lösungswege argumentativ erläutern,
- Kinder und Lehrkraft im Gespräch Ideen und Lösungswege herausarbeiten.

(Umsetzung des Programms SINUS-Transfer Grundschule im Schulset Mathematik im Bereich des Staatlichen Schulamtes Kassel auf der Grundlage des Moduls G1, 2004–2009)

Argumentieren

- mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen
- mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln
- Begründungen suchen und nachvollziehen

Anmerkung:

Argumentieren findet statt, wenn die Kinder für Ideen und Lösungswege durch Fragen wie „Warum ist das so?“ Vermutungen und Begründungen finden und dabei Beziehungen nutzen und wenn Ideen und Lösungswege unter Angabe von Gründen verworfen werden. Dabei müssen Lösungen und Begründungen nicht immer schriftlich fixiert sein, die Schulung der mündlichen Kompetenzen ist ebenso wichtig und geht der schriftlichen oftmals voraus.

(Umsetzung des Programms SINUS-Transfer Grundschule im Schulset Mathematik im Bereich des Staatlichen Schulamtes Kassel auf der Grundlage des Moduls G1, 2004–2009)

Modellieren

- Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren

Anmerkung:

Modellieren findet u.a. statt, wenn die Kinder lebensweltlichen Situationen relevante Informationen entnehmen, die Situationen modellieren und die Ergebnisse auf die Ausgangssituation zurückbeziehen. Modellieren ist gefordert, wenn Muster und Strukturen erkannt werden müssen und wenn eine inner- oder außermathematische Situation mit Mitteln der Mathematik bearbeitet wird.

(Umsetzung des Programms SINUS-Transfer Grundschule im Schulset Mathematik im Bereich des Staatlichen Schulamtes Kassel auf der Grundlage des Moduls G1, 2004–2009)

Darstellen

- für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen
- eine Darstellung in eine andere übertragen
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

Anmerkung:

Darstellen findet u.a. statt, wenn Kinder sich die Aufgabenbedingungen oder erste Ergebnisse so aufschreiben oder mündlich vergegenwärtigen, dass die geordneten Notationen die Weiterarbeit erleichtern. Gemeint ist u.a. auch, Beobachtungen, Überlegungen, Begründungen oder Einschätzungen mündlich oder schriftlich so auszudrücken, dass diese für andere verständlich sind. Darstellen ist gefordert, wenn Ideen und Lösungswege mündlich oder schriftlich unter Verwendung von Fachsprache und Symbolik aufgezeigt werden.

(Umsetzung des Programms SINUS-Transfer Grundschule im Schulset Mathematik im Bereich des Staatlichen Schulamtes Kassel auf der Grundlage des Moduls G1, 2004–2009)

Bei der Betrachtung der Kompetenzen ist zu beachten, dass diese untereinander oft nicht zu trennen sind.

Beispiele zur Illustration der allgemeinen mathematischen Kompetenzen finden sich in der Modulbeschreibung zu Modul G2, S. 18–25.

Anhang 2: Die Aufgabenanalyse: eine Arbeitstabelle

Bezug: SINUS-Transfer Grundschule. Schulset Mathematik am Staatlichen Schulamt Kassel (2004–2009): Praxis der Aufgabenanalyse

1.) Die Aufgabe ist der Leitidee/ den Leitideen zuzuordnen. (Eine Aufgabe kann mehrere Zuordnungen haben.)

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

2.) Mit der Aufgabe werden folgende inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen erzielt (Bezug: Bildungsstandards Mathematik):

3.) Betrachtung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen:

Bietet die Aufgabe Potential zum Problemlösen? <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	Wenn ja, welches?
Bietet die Aufgabe Potential zum Kommunizieren? <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	Wenn ja, welches?
Bietet die Aufgabe Potential zum Argumentieren? <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	Wenn ja, welches?
Bietet die Aufgabe Potential zum Modellieren? <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	Wenn ja, welches?
Bietet die Aufgabe Potential zum Darstellen? <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	Wenn ja, welches?

4.) Sonstiges (z.B. benötigtes Material):

Anhang 3: Die Aufgabenvariation: verschiedene Beispiele

Weitere Aufgabenvariationen finden sich im Modul G1, S. 30ff.

1.) Ein Aufgabenbeispiel zur Leitidee „Zahlen und Operationen“

Thema: „Gleiche Differenz“

Aufgabenstellung:

- Wähle eine zweistellige Zahl, z.B. 24.
- Füge zwischen den Ziffern 2 und 4 eine Null ein, es entsteht die Zahl 204.
- Subtrahiere die Zahl 24 von der Zahl 204: $204 - 24 = 180$
- Nun nimm die Zahl 27 und gehe genauso vor: $207 - 27 = 180$

→ Es fällt auf, dass die Differenz bei beiden Aufgaben 180 ist.

Aufgabenvariation:

Bei der Aufgabenvariation ist die Identifizierung der variablen Bestimmungselemente (Parameter) der Aufgabe der erste Schritt.

In diesem Beispiel sind dies:

- Die Ausgangszahl
Man stellt fest, dass sich nicht bei jeder zweistelligen Ausgangszahl auf diese Weise die Differenz 180 gibt. Wovon hängt das ab?
- Die Anzahl der Stellen der Ausgangszahl
Verallgemeinert man die ursprüngliche Aufgabenstellung und geht von einer dreistelligen Ausgangszahl, z.B. 124, aus, so gibt es zwei Möglichkeiten, die Null einzufügen (die dritte Möglichkeit wäre dann, die Null anzuhängen): 1024 und 1204. Nun kann man wieder untersuchen, unter welchen Bedingungen sich die gleiche Differenz ergibt.
- Die Anzahl der eingefügten Nullen
Geht man von einer zweistelligen Ausgangszahl, z.B. 24, aus und fügt zwei Nullen ein, so ergibt sich 2004. Nun können weitere Aufgaben erforscht werden.
- Die Differenz
Welche Differenzen kommen bei zweistelliger Ausgangszahl und einer eingefügten Null vor? Dies kann nun untersucht werden.

2.) Ein Aufgabenbeispiel zur Leitidee „Raum und Form“

Thema: Dreiecke auf dem 3x3-Geobrett spannen und in ein Gitternetz zeichnen

Aufgabenstellung:

- Spanne ein Dreieck auf dem 3x3-Geobrett. Zeichne dein Dreieck in das Gitternetz.
- Spanne viele verschiedene Dreiecke und zeichne sie in das Gitternetz.
- Arbeite mit einem Partnerkind. Vergleiche eure Dreiecke.
- Wie viele verschiedene Dreiecke könnt ihr finden?
- Habt ihr alle gefunden?
- Wie könnt ihr zeigen, dass es wirklich verschiedene Dreiecke sind?
(Festlegung: 2 Dreiecke werden als gleich angesehen, wenn man sie durch Drehen des Geobrettes oder durch Spiegeln als gleich erkennen kann.)
- Begründet, warum es keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabenvariation:

- Führt dieselbe Übung mit Quadraten statt Rechtecken durch und findet heraus, wie es bei Rechtecken ist.

3.) Ein Aufgabenbeispiel zur Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“

Thema: „Immer 6 Möglichkeiten“

Aufgabenstellung:

Mama will 3 Blumen in eine Schale pflanzen. Es gibt rote, blaue und gelbe Blumen. Sie nimmt von jeder Farbe eine Blume und pflanzt sie nebeneinander in die Schale.

- Wie sieht dann die bepflanzte Schale aus? Male sie auf.
- Kann Mama die Schale auch anders bepflanzen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es? Findest du sie alle? Male sie alle auf.
- Wie bist du zu deinen Lösungen gekommen? Schreibe auf.
- Warum gibt es keine weitere Lösung? Erkläre.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn eine Farbe zweimal vorkommen darf?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn eine Farbe dreimal vorkommen darf?

Aufgabenvariationen:

Alle Aufgaben, bei denen 3 Elemente variiert werden, z.B.:

- 3 Eiskugeln sollen ausgewählt werden
- 3 Kinder in einem Boot sitzen hintereinander
- Ein Mobile mit 3 Figuren soll gebastelt werden
- Drei Figuren (Rechteck, Kreis, Dreieck) sollen hintereinandergelegt werden:
(R–K–D, R–D–K, K–D–R, K–R–D, D–R–K, D–K–R): Kinder legen die Reihen
- Autokennzeichen bestehen oft aus 3 Ziffern: Welche Kombinationen sind möglich?
(Jede Ziffer soll einmal (2-mal, 3-mal) vorkommen.)

4.) Ein Aufgabenbeispiel zu den Leitideen „Zahlen und Operationen“ und „Muster und Strukturen“ (Klasse 2)

Thema: „Immer minus 9“

Finde die Ergebnisse

$$12 - 9 =$$
$$23 - 9 =$$
$$34 - 9 =$$
$$45 - 9 =$$

Aufgabenstellung:

- Schreibe auf, wie du die Ergebnisse gefunden hast.
- Vergleiche deine Ergebnisse mit denen deines Nachbarkindes.
- Vergleiche auch den Rechenweg.
- Was fällt an den Ergebnissen auf?
- Was fällt an der Anfangszahl (ersten Zahl, Startzahl) auf?
- Besprich deine Entdeckungen mit deinem Nachbarkind.
- Schreibe die nächsten drei Aufgaben mit Lösungen auf.
- Schreibe auch auf, wie du die Aufgaben und die Lösungen gefunden hast.
- Kannst du die 10. Aufgabe finden, ohne zu rechnen? (Anmerkung: Die 10. Aufgabe verlässt den Zahlenraum, dies kann aber von besonderem Reiz für die Kinder sein.)
- Beschreibe das Muster der Aufgabe.

Aufgabenvariationen:

- Gilt die Musterregel immer?
- Arbeite mit einem Partner. Denkt euch Aufgaben aus, bei denen sich die Anfangszahl nach einem Muster verändert und die abzuziehende Zahl eine andere als 9 ist.

Bsp.: $12 - 7 =$ $23 - 7 =$

- Was passiert, wenn die abzuziehende Zahl 1 weniger (1 mehr) wird?

Bsp.: $12 - 8 =$ $12 - 3 =$

$23 - 7 =$ $23 - 4 =$

$34 - 6 =$ $34 - 5 =$

- Erfinde weitere Minus-Musteraufgaben.
- Wann gilt die Musterregel nicht?
- Was passiert, wenn du plus rechnest?

Bsp.: $12 + 9 =$ $23 + 9 =$ $34 + 9 =$

Literatur

Im Portal des Programms SINUS-Transfer Grundschule finden sich Fachvorträge u.a. zum Thema „gute Aufgaben“ zum Downloaden (<http://www.sinus-grundschule.de>).

Bardy, P./ Hrzán, J. (2010): Aufgaben für kleine Mathematiker mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Köln

Büchter, A./ Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Berlin

KMK (2004): Beschlüsse der Kultusministerkonferenz Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Grundschule. Bonn

Quak, U./ Sterkenburgh, S./ Verboom, L. (2006): Die Grundschul-Fundgrube für Mathematik. Unterrichtsideen und Beispiele für das 1. bis 4. Schuljahr. Berlin

Rasch, R. (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Stuttgart

Rasch, R. (2007): Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen. Band 1/2 und Band 3/4. Stuttgart

Ruwisch, S./ Peter-Koop, A. (2009): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg

Schipper, W. (2004): SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G3: Mathematik zwischen Offenheit und Zielorientierung. Kiel

Selter, C. (2004): SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G2: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Kiel

Selter, C./ Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Stuttgart

Selter, C./ Sundermann, B. (2004): SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G9: Lernerfolg begleiten, Lernerfolg beurteilen. Kiel

Spiegel, H./ Selter, C. (2003): Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Stuttgart

Sundermann, B./ Selter, C. (2006): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Gute Aufgaben – Differenziertes Arbeiten – Ermutigende Rückmeldungen. Berlin

Walther, G. (2004): SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G1: Gute und andere Aufgaben. Kiel

Walther, G. u.a. (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret: Aufgabenbeispiele – Unterrichts Anregungen – Fortbildungsideen. Berlin

Winter, H. (1972): Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Eine Schriftenreihe des Kultusministeriums NRW. Ratingen, S. 67–95

Winter, H. (1992): Sachrechnen in der Grundschule. Berlin

Wittmann, E. C. (2009): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig

Wittmann, E. C./ Müller, G. N. (1993): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart

Wittmann, E. C./ Müller, G. N. (1993): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart